R

التكامـــل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان F(b)-F(a)=G(b)-G(a).

أي أن العدد الحقيقي F(b)-F(a) غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F.

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I.

العدد الحقيقي F(b)-F(a) حيث F دالة أصلية للدالة f علىI , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b

ويكتب $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ مجموع $f(x)dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

a وb يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x)dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=........$$

من أجل تبسيط الكتابة F(b)-F(a) نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

الدالة $x\to\frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x\to\ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^2=\ln 2$

* أحسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x dx$; $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb وc عناصر منI

* $\int_a^a f(x)dx=0$ * $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

* $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

أمثلة

أحسب $I=\int_{-1}^{1}|x|dx$

$$\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}-xdx+\int_0^1 xdx=\left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1$$

ب)- لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

R

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

لدينا $\varphi(x) = F(x) - F(a)$ $\forall x \in I$ حيث F دالة أصلية لـ f على I.
اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f$ $\varphi(a) = 0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.
الدالة المعرفة على I بما يلي $x \to \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x \to \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في1 .

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$ $\forall x \in]0;+\infty[$

ج)- خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

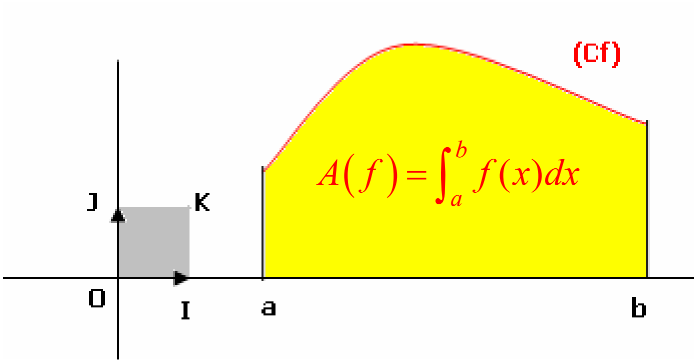
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx$; $\int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاط $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

أحسب $I + J$ $I - J$ و استنتج I ; J

د التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a;b]$ ($a \prec b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي
$A(f) = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

ملاحظة إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

نعتبر $f(x) = \frac{1}{x^2}$

R

أنشئ C_f $\left(\|\vec{i}\|=1cm \quad \|\vec{j}\|=2cm\right)$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$; $x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x)=\ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left[\frac{1}{3}u^3(x)\right]_1^e=\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e=\frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ لدينا $\frac{2}{e^x+1}=2\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1+e^x}$ يكتب على شكل $-2\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=1+e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx=\left[-2\ln|u(x)|\right]_0^1=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$

تمرين 1- حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a وb وc حيث $\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}=ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2+1}$ $\quad \forall x\neq 0$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2-2x+5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2+1}$ حيث u دالة يجيب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+5}dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$; $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ $\quad \left(\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a;b]$

نعلم أن

$$\forall x\in[a;b] \quad (fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\forall x\in[a;b] \quad f'(x)g(x)=(fg)'(x)-f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[(fg)(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ نضع $u'(x)=\cos x$; $v(x)=x$

ومنه $u(x)=\sin x$; $v'(x)=1$

R

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

تمرين

أحسب $I = \int_1^e \ln x dx$; $J = \int_0^{\pi} x^2\sin x dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx$

الحل

$$K = \left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx = \left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = ...$$

تمرين 1- أحسب $\int_1^2 x^2\ln x dx$ $\quad \int_0^3 (x-1)e^{2x}dx$ $\quad \int_0^1 x\sqrt{x+3}dx$ $\quad \int_0^1 \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|dx$

2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$

3- أحسب $I = \int_0^x e^t\cos^2 t dt$ (يمكن اعتبار $J = \int_0^x e^t\sin^2 t dt$)

III- التكامل و الترتيب

1- مقارنة تكاملين

a) لتكن f دالة متصلة على [a;b] و F دالة أصلية لـ f على [a;b]

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ $\quad \forall x\in[a;b]\quad F'(x) = f(x)$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان F تزايدية على $[a;b]$

وحيث أن $a\le b$ فان $F(a)\le F(b)$ اذا $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت $f\le g$ على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

مثال

نؤ طر $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

لدينا $1\le 1+x\le 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\le\frac{x^2}{1+x}\le x^2$ $\quad \forall x\in[0;1]$ ومنه $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \le I \le \int_0^1 x^2 dx$

إذن $\frac{1}{6}\le I\le\frac{1}{3}$

c) خاصيات

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \le b)$

إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le 0$

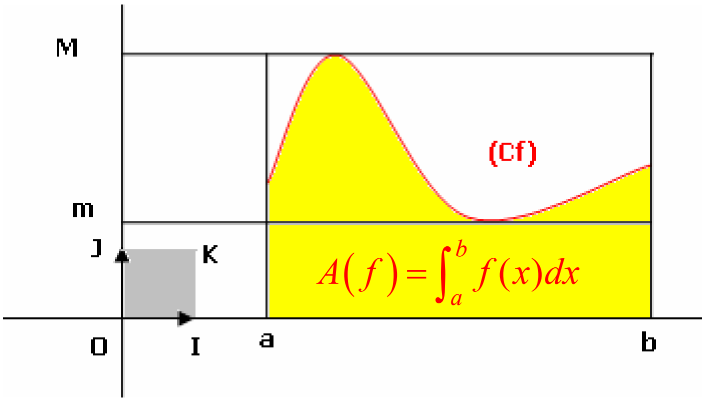
ب- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ج- لتكن M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f) = \int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ و المستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I = \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ نبين أن $0 \le I \le \sqrt{2}$

الدالة $x \to \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0;+\infty[$ ومنه $\sup_{x\in[1;3]} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $0 \le I \le (3-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \prec b)$ و M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

إذن $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a;b]$

حيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a \ne b)$

العدد الحقيقي $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$.

يوجد على الأقل c في $[a;b]$ حيث $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f) = \int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م هي مساحة المستطيل

الذي بعداه $(b-a)$ و $f(c)$.

R

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

a) $f(x)=(x-1)e^{x}$ $\quad I=[-1;0]$; b) $f(x)=\dfrac{x^{3}+5x^{2}+x+3}{x+1}$ $\quad I=[0;1]$

2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x)=\arctan x$

الجواب عن السؤال2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^{2}}$ $\forall x\in[0;1]$ و منه

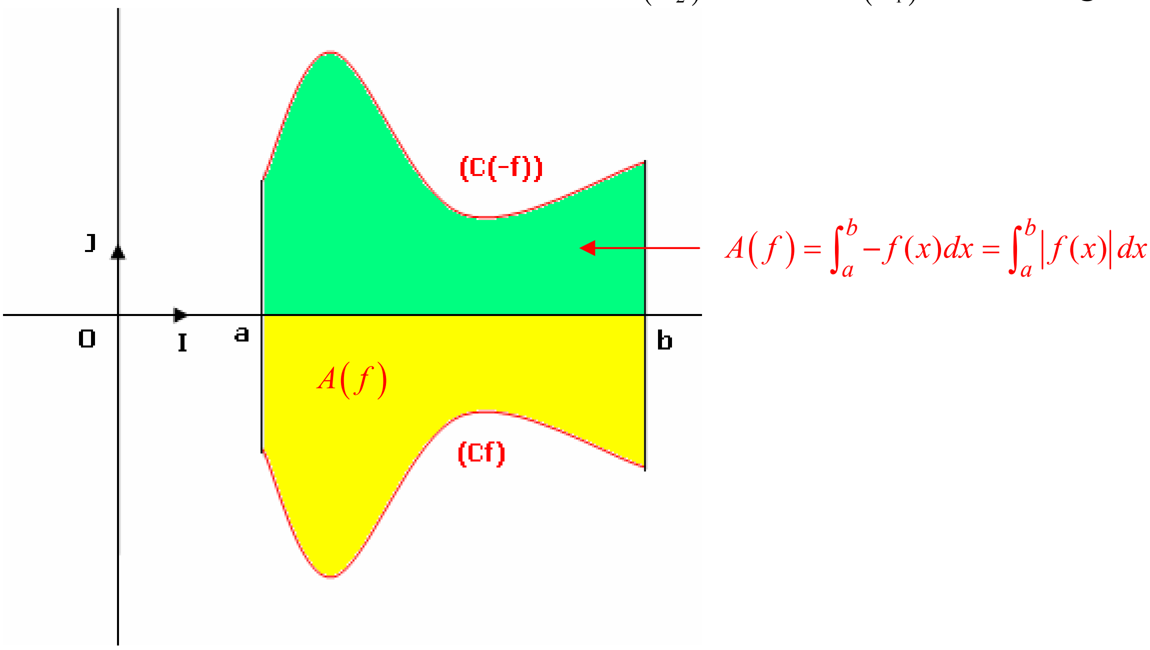
$\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le 1$ $\forall x\in[0;1]$ اذن $\int_0^x \dfrac{1}{2}dt\le\int_0^x f'(t)dt\le\int_0^x dt$ $\quad \forall x\in[0;1]$ $\dfrac{x}{2}\le f(x)\le x$

IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $\quad (\Delta_2): x=b$



*إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

*إذا كان كانت f سالبة على $[a;b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f)=\int_a^b -f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a;b]$ مثلا يوجد c من $[a;b]$ حيث f موجبة على $[a;c]$ و سالبة على $[c;b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a;b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a;c]$ و $\Delta(f)$ على $[c;b]$

$$A(f)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب الى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل

و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)|dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

مثال

نعتبر $f(x)=x^3-1$

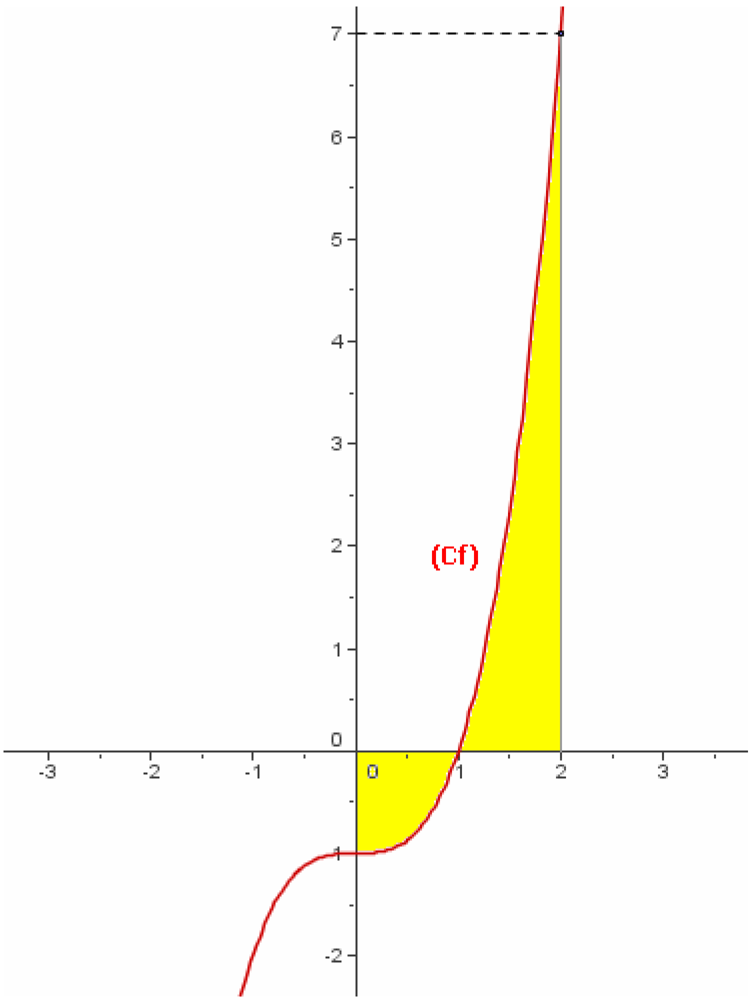
حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

$x=2$; $x=0$

$$A=\int_0^2 |f(x)|dx$$

$$A=\int_0^1 (1-x^3)dx+\int_1^2 (x^3-1)dx$$

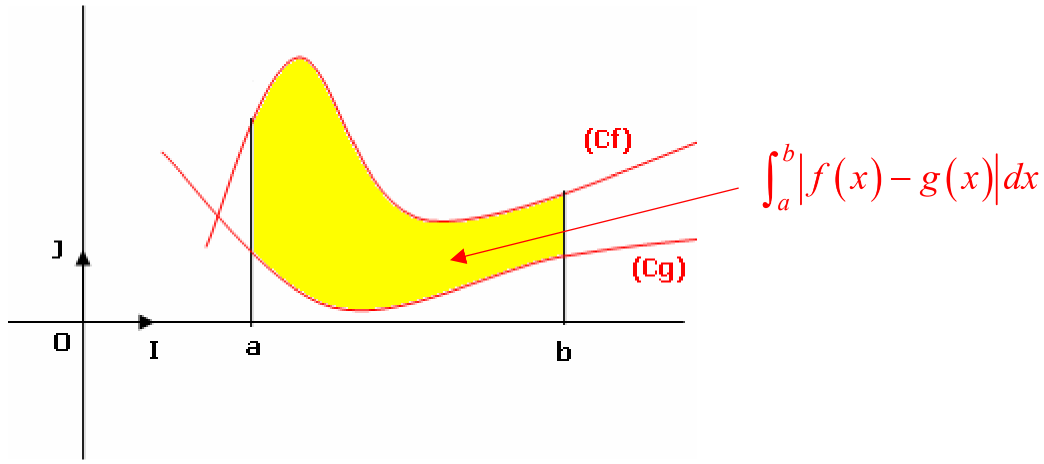
$$A=\frac{7}{2}u \qquad \left(u=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\right)$$



2- مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

و Δ هو الحيز المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$ في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$



إذا كان $f \geq g \geq 0$ فان $A(\Delta)=A(f)-A(g)$

$$A(\Delta)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

إذا كان $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و بإتباع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

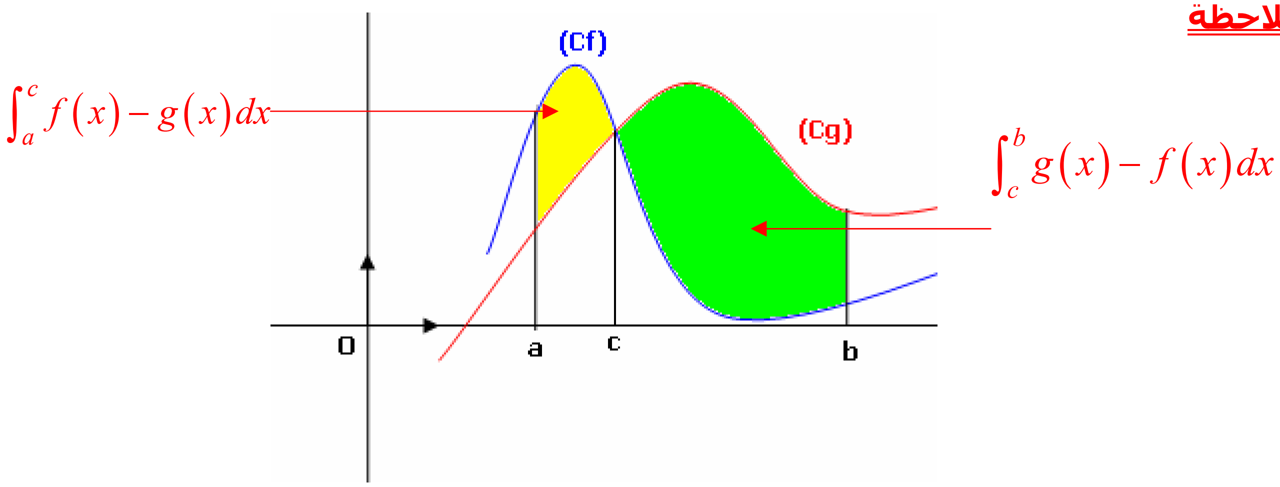
خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $(\Delta_2): x=b$

هي $A(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta)=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx$$

V- حساب الحجوم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه $\|\vec{i}\|$

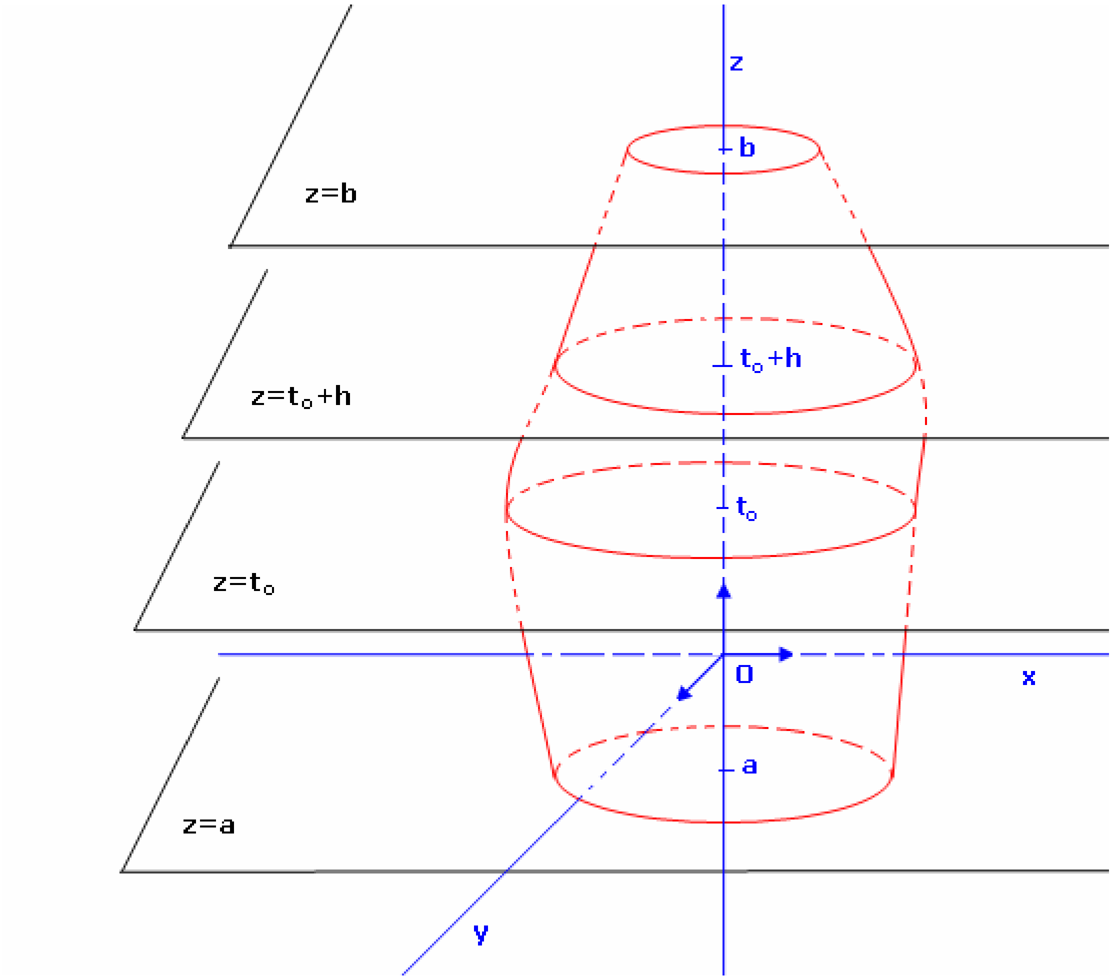
1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$

نرمز بـ$S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة النقط من S المحصور بين المستويين $z=a$; $z=t$

ليكن t_0 من $[a;b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0+h \in [a;b]$

R



حجم مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S المحصورة بين $z=t_0$ و $z=t_0+h$ هو $V(t_0+h)-V(t_0)$
ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0+h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0)\le S(t_0+h)$ فان $h\cdot S(t_0)\le V(t_0+h)-V(t_0)\le h\cdot S(t_0+h)$

و منه $S(t_0)\le \dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}\le S(t_0+h)$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t\to S(t)$ متصل على $[a;b]$ فان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=S(t_0)$

إذن الدالة $t\to V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ و $V'(t)=S(t)\quad \forall t\in[a;b]$

أي أن الدالة $t\to V(t)$ دالة أصلية للدالة $t\to S(t)$ على $[a;b]$

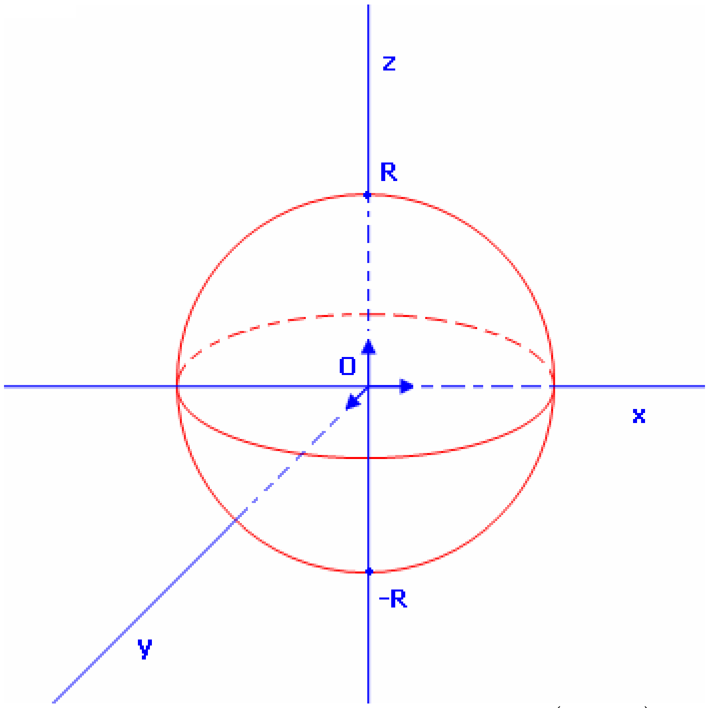
و بما أن $V(a)=0$ فان $V(t)=\int_a^t S(x)\,dx\quad \forall t\in[a;b]$

إذن حجم المجسم S هو $V=V(b)=\int_a^b S(x)\,dx$ وحدة قياس الحجم .

خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م
ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$
نرمز بـ$S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$

إذا كان أن التطبيق $t\to S(t)$ متصلا على $[a;b]$ فان حجم المجسم S هــو $V=\int_a^b S(z)\,dz$ وحدة قياس الحجم.



تمرين

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R

الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O.

الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي بالمعادلتين $z = R$; $z = -R$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفلكة حيث $z = t$

$-R \le t \le R$ هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$

و مساحته $S(t) = \pi\left(R^2 - t^2\right)$

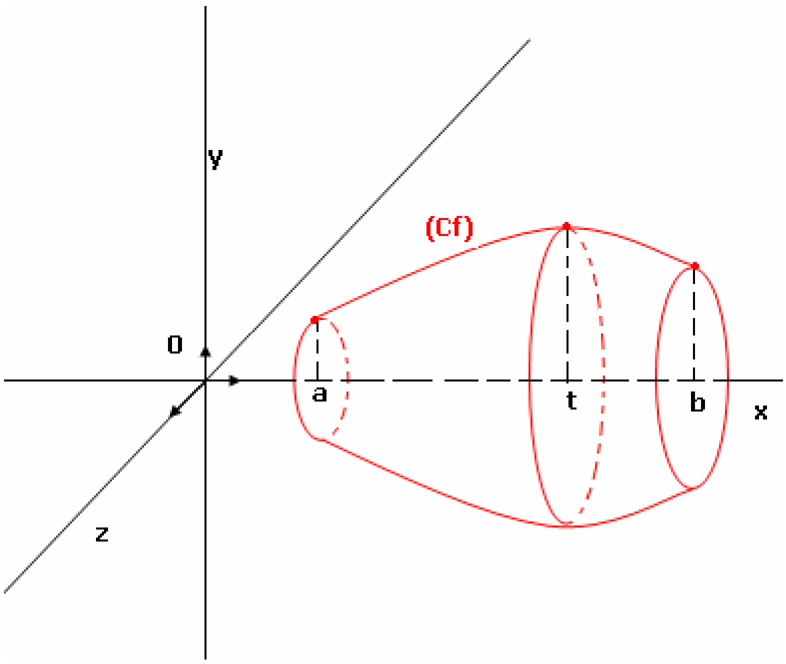
بما أن التطبيق $t \to \pi\left(R^2 - t^2\right)$ متصلة على $[-R;R]$

فان $V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - t^2\right)dt = \frac{4}{3}\pi R^3$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

إذا دار C_f حول المحور $(O;\vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$$S(t) = \pi f^2(t)$$

التطبيق $t \to \pi f^2(t)$ متصلة على $[a;b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله o , و f دالة متصلة على $[a;b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

بوحدة قياس الحجم .

R

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{2}x\ln x$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1;e]$